DILOGARITHM IDENTITIES IN CONFORMAL FIELD THEORY AND CLUSTER ALGEBRAS (Quantum groups and quantum topology)

中西, 知樹

数理解析研究所講究録
第 1714 巻 2010 年 26-31

DILOGARITHM IDENTITIES IN CONFORMAL FIELD THEORY AND CLUSTER ALGEBRAS

名古屋大学　中西 知樹 (Tomoki Nakanishi)
Nagoya University

以下では共形場理論における dilogarithm 恒等式予想の団代数による証明を与えた論文 [Nak09] の概要について述べる.

1. Rogers dilogarithm

以下で定める関数 $L(x)$ を Rogers dilogarithm 関数という.

$$L(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y} \right\} dy \quad (0 \le x \le 1). \tag{1}$$

関数 $L(x)$ は単調増加関数であり, 端点でつぎの値をとる.

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

この基本的事実は後 (Section 5 ステップ 3) において大変重要であることを注意しておきたい. また, 以下の関数関係式が良く知られている.

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6}, \tag{3}$$

$$L(x) + L(y) + L(1-xy) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{4}$$

関係式 (3) を Euler の関係式, 関係式 (4) を Abel の関係式, あるいは 5 項関係式 (5-term relation または pentagon relation) と呼ぶことが多い.

2. 共形場理論における Dilogarithm 恒等式

X を有限型 simply laced Dynkin 図形 (すなわち, A_r, D_r, E_6, E_7, E_8) とし, I をその index set とする. $\ell \ge 2$ を任意の整数とする. 正の実数の族 $\{Y_m^{(a)} \mid a \in I; 1 \le m \le \ell-1\}$ に対して, 以下の代数関係式の族 (constant Y-system) を考える.

$$(Y_m^{(a)})^2 = \frac{\displaystyle\prod_{b:b\sim a} (1+Y_m^{(b)})}{(1+Y_{m-1}^{(a)}{}^{-1})(1+Y_{m+1}^{(a)}{}^{-1})}. \tag{5}$$

ただし, $b \sim a$ は X において b と a が隣接することを表し, $Y_0^{(a)-1} = Y_\ell^{(a)-1} = 0$ とする.

Theorem 1 (Nahm-Keegan ['08]). (5) をみたす正の実数の族が一意的に存在する.

80年代後半にBazhanov, Kirillov, Reshetikhinは熱力学的Bethe仮説の研究を通して共形場理論のcentral charageの$L(x)$による表示の特筆すべき予想を得た.

Conjecture 2 (Dilogarithm 恒等式. Bazahnov, Kirillov, Reshetikhin [KR86, Kir89, KR90, BR90]). 関係式(5)をみたす正の実数の族$\{Y_m^{(a)} \mid a \in I; 1 \leq m \leq \ell-1\}$に対して次の恒等式が成り立つ.

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{a\in I}\sum_{m=1}^{\ell-1} L\left(\frac{Y_m^{(a)}}{1+Y_m^{(a)}}\right) = \frac{\ell \dim \mathfrak{g}}{h+\ell} - r. \tag{6}$$

ただし, hとrはそれぞれXのCoxeter数とrank, $\mathfrak{g}$はX型の単純Lie代数を表す.

XがA型の場合にこの予想が成り立つことはKirillov [Kir89]により解の明示公式を用いて証明されている. (6)の右辺の第一項はWess-Zumino-Witten共形場理論のcentral charge, また右辺全体はparafermion共形場理論のcentral chargeである. (6)は熱力学Bethe仮説法において可積分模型のさまざまな極限を共形場理論と同定する重要な役割を果たす. さらに, (6)は共形場指標のRogers-Ramanujan型恒等式やmodular不変性, 双曲幾何, 代数的K理論などとも密接に関連をしている. これらの理由により, 90年代においてこの予想は多くの興味を持たれ, それを証明をするさまざまな試みがなされたが部分的にしか成功しなかった.

以上が2000年ごろFomin-Zelevinskyによって団代数(cluster algebra)が導入される以前(B.C. = <u>B</u>efore <u>C</u>luster algebra)の状況であった.

3. Y-SYSTEMと関数的DILOGARITHM恒等式

90年代の初頭, Dilogarithm恒等式と同じく熱力学的Bethe仮説の研究においてZamolodchikov [Zam91], Kuniba-Nakanishi [KN92], Ravanini-Tateo-Valleriani [RTV93]により方程式系(5)のアフィン拡張であるY-systemが導入された. 以下では[RTV93]によるY-systemを考える.

XとX'を有限型のsimply laced Dynkin diagramのペアとし, IとI'それらのindex setとする. 変数の族$\{Y_{ii'}(u) \mid i \in I, i' \in I', u \in \mathbb{Z}\}$に対して以下の代数(関数)方程式系をペア$(X, X')$に付随するY-systemといい, ここでは$\mathbb{Y}(X, X')$と表す.

$$Y_{ii'}(u-1)Y_{ii'}(u+1) = \frac{\prod_{j:j\sim i}(1+Y_{ji'}(u))}{\prod_{j':j'\sim i'}(1+Y_{ij'}(u)^{-1})}. \tag{7}$$

ただし, $j \sim i$はXにおいてjがiに隣接することを, また$j' \sim i'$はX'においてj'がi'に隣接することを表す.

Conjecture 3 (周期性. Ravanini-Tateo-Valleriani [RTV93]). $\mathbb{Y}(X, X')$をみたす変数の族$\{Y_{ii'}(u) \mid i \in I, i' \in I', u \in \mathbb{Z}\}$に対して以下が成り立つ.

$$Y_{ii'}(u + 2(h+h')) = Y_{ii'}(u). \tag{8}$$

ここで, hとh'はそれぞれXとX'のCoxeter数である.

さらに, Gliozzi-Tateo [GT95]はConjecture 2の著しい一般化を与えた.

Conjecture 4 (関数的 dilogarithm 恒等式. Gliozzi-Tateo [GT95]). $\mathbb{Y}(X,X')$ をみたす任意の正の実数の族 $\{Y_{ii'}(u) \mid i \in I, i' \in I', u \in \mathbb{Z}\}$ に対して次の恒等式が成り立つ.

$$\frac{6}{\pi^2} \sum_{(i,i') \in I \times I'} \sum_{0 \le u < 2(h+h')} L\left(\frac{Y_{ii'}(u)}{1+Y_{ii'}(u)}\right) = 2hrr'. \tag{9}$$

Conjecture 4 は Conjecture 2 を特殊な場合 ($X' = A_{\ell-1}$, u に関する定数解 $Y_{ii'} = Y_{ii'}(u)$) として含んでいる. また, 一番簡単な場合 $(X,X') = (A_1,A_1)$ では (9) は Euler の関係式 (3) に一致し, 次に簡単な場合 $(X,X') = (A_2,A_1)$ では (9) は Abel の関係式 (4) に一致する. さらに, Conjecture 4 は dilogarihm 恒等式において本質的なのは変数の値そのものではなくそれらのみたす関係式 (Y-system) であることをわれわれに教えてくれる.

Conjecture 3, 4 について知られている結果および団代数の進展を年表風にまとめたものが以下の表である.

Who and When	Conj 3	Conj 4	Method
Gliozzi-Tateo 95	(A_r, A_1)	(A_r, A_1)	明示解
Frenkel-Szenes 95	(A_r, A_1)	(A_r, A_1)	明示解 $\boxed{\text{定値条件 (1)}}$
Fomin-Zelevinsky 00∼			$\boxed{\text{団代数}}$
Fomin-Zelevinsky 03	(any, A_1)		団代数に近い定式化 (2) $\boxed{\text{Coxeter 変換}}$
Chapoton 05		(any, A_1)	(1) + (2) $\boxed{0/\infty \text{ 極限での評価}}$
Szenes 06 Volkov 06	$(A_r, A_{r'})$		グラフ上の平坦接続 明示解
Fomin-Zelevinsky 07			$\boxed{\text{係数付き団代数}}$ (3) $\boxed{\text{F-多項式}}$ (4)
Keller 08	$\boxed{\text{(any, any)}}$		(3)+(4) 団圏 (cluster category) Auslander-Reiten 理論

以上のうち、特に枠で囲ったアイデア、手法、結果を統合して以下の結果を得た.

Theorem 5 ([Nak09]). 任意の有限型 simply laced Dynkin 図形のペア X, X' に対して Conjecture 4 は成り立つ.

Corollary 6. 任意の有限型 simply laced Dynkin 図形 X と整数 $\ell \ge 2$ に対して Conjecture 2 は成り立つ.

4. 定値条件

われわれの証明において上の表の中にある Frenkel-Szenes [FS95] による定値条件 (constancy condition) が基本的である. 以下で述べるように, これは dilogarithm 和についての非常に一般的な定理である.

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ の任意の開区間または閉区間とする. 区間 $\mathcal{I}$ から非負実数全体の集合 $\mathbb{R}_+$ への微分可能な関数全体 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{I})$ は通常の関数の積により乗法的 abel 群をなす. $\mathcal{C}$ のテンソル積 $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}$ を生成元 $f \otimes g$ $(f, g \in \mathcal{C})$ と基本関係式

$$(fg) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h, \quad f \otimes (gh) = f \otimes g + f \otimes h \tag{10}$$

を持つ加法的 abel 群と定める. このとき,

$$1 \otimes h = h \otimes 1 = 0, \quad f^{-1} \otimes h = f \otimes h^{-1} = -f \otimes h \tag{11}$$

が成り立つことにも注意する. さらに, $S^2\mathcal{C}$ を $f \otimes g + g \otimes f$ $(f, g \in \mathcal{C})$ で生成される $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}$ の部分群とし, それによる商群を $\bigwedge^2 \mathcal{C} := \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}/S^2\mathcal{C}$ と表す. また, $\bigwedge^2 \mathcal{C}$ におけるテンソル積 $f \otimes g$ を $f \wedge g$ と表す.

Theorem 7 (Frenkel-Szenes [FS95]). $f_1(t), \dots, f_n(t)$ を $\mathcal{I}$ から 区間 $(0, 1)$ への微分可能な関数とし, さらに $\bigwedge^2 \mathcal{C}$ において以下の関係をみたすとする.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge (1 - f_i) = 0 \quad (\text{定値条件}) \tag{12}$$

このとき, dilogarithm 和 $\sum_{i=1}^{n} L(f_i(t))$ は $t \in \mathcal{I}$ に関して定値である.

[FS95] による証明は驚くほど簡単である. すなわち, 仮定 (12) の下で dilogarithm 和の左辺の t に関する微分が 0 となることが初等的な計算により示される.

5. Theorem 5 の証明のあらまし

最後に等式 (9) の証明のあらましとその要点を簡単に述べる. 詳細は論文 [Nak09] を参照されたい.

証明は大きく以下の 4 つのステップに分かれる.

ステップ 1. Y-system (7) をある係数付き団代数における係数の間の関係式として定式化する.

ステップ 2. (9) の左辺が Y-system の解 $\{Y_{ii'}(u)\}$ に依らないことを Theorem 7 を用いて示す. ステップ 1 の係数付き団代数による定式化 (特に F 多項式による表示公式) を用いることによって, 定値条件 (12) が団代数レベルでなりたつことを示すことができる.

ステップ 3. ステップ 2 により等式 (9) が解 $\{Y_{ii'}(u)\}$ に依らないことがわかったので, 次にこの値を評価する. このとき, 特定の解を得る事やその dilogarithm 関数の値を知ることを期待できない. それでは何をすべきであろうか? ここで (2) の事実に注意して, 各 $Y_{ii'}(u)$ が 0 または ∞ のいずれかの極限を持つような極限 ($0/\infty$ 極限と呼ぼう) で評価するというのが ($X' = A_1$ の場合における) Chapoton [Cha05] のアイデアである. 幸いなことに, 一般の場合でも $0/\infty$ 極限が存在することは団代数の一般的な定理より保証される. すると, (9) の左辺の値は, $0/\infty$ 極限のもとで, (9) に現れる $Y_{ii'}(u)$ の中で発散するものの数 N_- で与えられることがわかる. (特に, この時点で (9) の左辺が非負整数になることがわかる.)

ステップ 4. 最後に具体的に N_- を求める．そのためには, Y-system の代わりに, それを tropical 化した tropical Y-system を考えれば良い．tropical 化とは, 団代数の初期係数の組 $y_{i,i'}$ $((i,i') \in I \times I')$ の生成する subtraction-free な有理関数のなす半体において和を tropical 和

$$\prod_{(i,i') \in I \times I'} y_{i,i'}^{a_{i,i'}} \oplus \prod_{(i,i') \in I \times I'} y_{i,i'}^{b_{i,i'}} = \prod_{(i,i') \in I \times I'} y_{i,i'}^{\min(a_{i,i'}, b_{i,i'})} \tag{13}$$

で置きかえたものである．なぜこのようなものを唐突に用いるかと言うと, 極限が 0 か ∞ のどちらかになるかを知るには, 有理関数の degree の正負のみを知れば良く, それを与えるのがまさに tropical 化であるからである．

tropical Y-system は Y-system よりはるかに簡単である．そこで具体的に tropical Y-system を調べてみる．すると, パラメーター u のある区間ごとに, tropical Y-system は $I \times I'$ の第 1 成分と第 2 成分に関してきれいに分解し (factorization property), それによって解の明示式が X と X' の root system およびそれらの (区分線形化された) Coxeter 変換を用いて表される事がわかる．その結果, N_- の具体的な値が Coxeter 数などを用いて具体的に求まり, それが予想される (9) の右辺の値に一致することが示され, 証明が完結する．

6. 結び

Theorem 5 と同様の結果が, これらの nonsimply laced 版 [IIK+10a, IIK+10b] や sine-Gordon 模型に付随する Y-system [NT10] についても得られている．その場合は Y-system の周期性を示すことがむしろ主要な問題となり, このとき団代数の背後にある団圏 (cluster category) の理論 [Pla10b, Pla10a] が大いに役立つ．その結果, Y-system の周期性もまた tropical Y-system の周期性に帰着されることがわかるのである．このことと Section 5 のステップ 4 において定数の評価が tropical Y-system に帰着されることとを合わせて,「tropical Y-system はすべてを知っている」というのがわれわれの結論でありまたスローガンである．

また, より最近の研究により, 上のステップ 1 からステップ 3 までは実は任意の周期的団代数に対してなりたつものであることが示された [Nak10]. すなわち, 任意の周期的団代数 (より正確にはその任意の周期) に対して関数的 dilogarithm 恒等式が付随するのである．(関連した結果が Fock-Goncharov によっても得られている [FG09].)

このように, 団代数と dilogarithm 恒等式との表裏一体な関係が明らかになった現在の視点から振り返ると, なぜ 90 年代 (=B.C.) に dilogarithm 恒等式があれほど難攻不落に思えたかについての納得が得られるとともに, また数学の歩みの確かさと不思議さにあらためて感慨を覚えるのである．

References

[BR90] V. V. Bazhanov and N. Reshetikhin, *Restricted solid-on-solid models connected with simply laced algebras and conformal field theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 1477–1492.

[Cha05] F. Chapoton, *Functional identities for the Rogers dilogarithm associated to cluster Y-systems*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 755–760.

[FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286, arXiv:math/0702397 [math.QA].

[FS95] E. Frenkel and A. Szenes, *Thermodynamic Bethe ansatz and dilogarithm identities. I*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 677–693, arXiv:hep-th/9506215.

[GT95] F. Gliozzi and R. Tateo, *ADE functional dilogarithm identities and integrable models*, Phys. Lett. **B348** (1995), 677–693, arXiv:hep-th/9411203.

[IIK+10a] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r*, 2010, arXiv:1001.1880 [math.QA].

[IIK+10b] ———, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r, F_4, and G_2*, 2010, arXiv:1001.1881 [math.QA].

[Kir89] A. N. Kirillov, *Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras*, J. Sov. Math. **47** (1989), 2450–2458.

[KN92] A. Kuniba and T. Nakanishi, *Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 3487–3494, arXiv:hep-th/9206034.

[KR86] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Exact solution of the Heisenberg XXZ model of spin s*, J. Sov. Math. **35** (1986), 2627–2643.

[KR90] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras,*, J. Sov. Math. **52** (1990), 3156–3164.

[Nak09] T. Nakanishi, *Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case*, 2009, arXiv:math.0909.5480 [math.QA].

[Nak10] ———, *Periodic cluster algebras and dilogarithm identities*, 2010, arXiv:1006.0632 [math.QA].

[NT10] T. Nakanishi and R. Tateo, *Dilogarithm identities for sine-Gordon and reduced sine-Gordon Y-systems*, 2010, arXiv:1005.4199 [math.QA].

[Pla10a] P. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1004.0830 [math.RT].

[Pla10b] ———, *Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1002.4956 [math.RT].

[RTV93] R. Ravanini, R. Tateo, and A. Valleriani, *Dynkin TBA's*, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993), 1707–1727, arXiv:hep-th/9207040.

[Zam91] Al. B. Zamolodchikov, *On the thermodynamic Bethe ansatz equations for reflectionless ADE scattering theories*, Phys. Lett. **B253** (1991), 391–394.